Université Paul Sabatier de Toulouse, année universitaire 2004-2005

CIMP, PHYSIQUE

Corrigé sommaire de l'épreuve 3 de contrôle continu, section A, décembre 2004

A. Questions de cours (5 points)

1) L'expression réelle d'une onde monochromatique plane progressive est la suivante :

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = A\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \varphi)$$

$\omega = 2\pi\nu$ étant la pulsation, $\mathbf{k}$ le vecteur d'onde, lequel est relié à ω et v par $\mathbf{k} = (\omega/v)\mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ étant le vecteur unitaire défini par la direction de propagation et φ une phase constante. L'analyse dimensionnelle des deux membres de cette dernière équation donne :

$$[L]^{-1} = [T]^{-1} \times [L]^{-1}[T]$$

À l'expression précédente, on associe l'expression complexe :

$$\underline{\Psi}(t, \mathbf{r}) = A\exp[-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \varphi)] = \underline{\psi}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t) \quad \text{où} \quad \underline{\psi}(\mathbf{r}) = A\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\exp(i\varphi)$$

2) Une onde stationnaire diffère fondamentalement d'une onde progressive, car son expression réelle se met sous la forme d'une produit de deux fonctions séparées de l'espace et du temps :

$$\Psi(t, x) = A\cos(\omega t + \phi_t)\cos(kx + \phi_x)$$

On réalise une telle onde en superposant deux ondes, l'une progressive et l'autre régressive.

B. Problème (15 points)

Vitesses de satellisation et d'évasion dans les voisinages terrestre et solaire

1. Voisinage terrestre

a) Dans le repère de Frenet, la loi fondamentale de la dynamique appliquée à A, en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre, à la distance $TA = r$, sous l'effet de la seule gravitation, donne :

$$m\frac{v^2}{r}\,\mathbf{e}_n = -\frac{GmM_T}{r^2}\,\mathbf{e}_r \quad \text{avec} \quad \mathbf{e}_n = -\mathbf{e}_r$$

Par conséquent, en simplifiant :

$$v^2 = \frac{GM_T}{r} \quad \text{d'où} \quad v_s = \left(\frac{GM_T}{r}\right)^{1/2} = 7,787\,\text{km.s}^{-1}$$

b) L'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ de A et son énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ de gravitation ont pour expressions respectives :

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{GM_T}{r}\right) = \frac{GM_Tm}{2r} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_p = -\frac{GM_Tm}{r}$$

On en déduit son énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{GM_Tm}{2r} - \frac{GM_Tm}{r} = -\frac{GM_Tm}{2r} \quad \text{et donc} \quad \mathcal{E}_m = \frac{\mathcal{E}_p}{2} = -\mathcal{E}_k$$

Les graphes sont des hyperboles. Le signe négatif de l'énergie mécanique vient de celui de l'énergie potentielle, laquelle est négative en raison de l'origine prise conventionnellement lorsque le satellite est infiniment éloigné de la Terre. L'application numérique donne :

$$\frac{\mathcal{E}_m}{m} = -\frac{GM_T}{2r} = -30,32\,\mathrm{MJ.kg^{-1}}$$

c) Le théorème de l'énergie mécanique donne, puisque le travail de la force de frottement, qui est non-conservative, est négatif :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W_f < 0$$

d'où $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p/2 = -\mathcal{E}_k$ diminue. Il en résulte que $\mathcal{E}_k$ et donc la vitesse augmentent. Cette augmentation de $\mathcal{E}_k$ est due au rôle singulier de $\mathcal{E}_p$ qui diminue deux fois plus que l'énergie mécanique.

d) La vitesse de libération terrestre est donc telle que :

$$\frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{GM_T m}{r} = 0 \quad \text{d'où} \quad v_l = \left(\frac{2GM_T}{r}\right)^{1/2} = 2^{1/2}\,v_s = 11\,\mathrm{km.s^{-1}}$$

L'excédent de vitesse est alors :

$$v_l - v_s = 3,2\,\mathrm{km.s^{-1}}$$

Quant à la variation d'énergie mécanique par unité de masse, elle vaut :

$$\frac{\Delta\mathcal{E}_m}{m} = 0 - \left(-\frac{GM_T}{2r}\right) = \frac{GM_T}{2r} = 30,32\,\mathrm{MJ.kg^{-1}}$$

2. Voisinage solaire

a) La vitesse de satellisation V_T de la Terre sur son orbite approximativement circulaire, de centre S et de rayon $ST = 149 \times 10^6$ km, autour du Soleil, a pour expression, d'après ce qui précède :

$$V_T = \left(\frac{GM_s}{TS}\right)^{1/2} = 29,9\,\mathrm{km.s^{-1}}$$

c) La vitesse de libération, est comme précédemment :

$$V_l = \left(\frac{2GM_s}{TS}\right)^{1/2} = 2^{1/2}\,v_T = 42,3\,\mathrm{km.s^{-1}}$$

3. Voisinage terrestre et solaire (hors barême)

a) La conservation de l'énergie mécanique donne :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM_T}{r} = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \text{d'où} \quad v_1^2 = v_0^2 - \frac{2GM_T}{r} \quad \text{soit} \quad v_1^2 = v_0^2 - v_l^2$$

b) Comme $V = V_l$, On déduit de ce qui précède :

$$(V_l - V_T)^2 = v_0^2 - v_l^2 \quad \text{d'où} \quad v_0 = [v_l^2 + (V_l - V_T)^2]^{1/2}$$

L'énergie mécanique, par unité de masse, s'écrit :

$$\frac{\mathcal{E}_m}{m} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM_T}{r} = \frac{v_0^2}{2} - v_s^2$$

Application numérique pour l'altitude $h = 200$ km :

$$v_0 = [7,787^2 + (42,3 - 29,9)^2]^{1/2} = 14,6\,\mathrm{km.s^{-1}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{E}_m}{m} = \frac{v_0^2}{2} - v_s^2 = 153,7\,\mathrm{MJ.kg^{-1}}$$